<u>Πρόταση</u>: (α) $\forall x,y\in\mathbb{Z}$ ισχύει: $x+y\in\mathbb{Z}$, $xy\in\mathbb{Z}$ κ' $x-y\in\mathbb{Z}$

(β) $\mathbb{N}=\mathbb{R}^{+}\cap\mathbb{Z}$

(γ) Αν $x\in\mathbb{Z}$ $\nexists\, y\in\mathbb{Z}$ με $x<y<x+1$

<u>Απόδειξη</u>: (α) Από προηγούμενη πρόταση $\exists\, \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{N}$ ώστε $x=\alpha-\beta$, $y=\gamma-\delta$.

- $x+y=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)\in\mathbb{Z}$
- $x-y=(\underset{\mathbb{N}}{\alpha+\delta})-(\underset{\mathbb{N}}{\beta+\gamma})\in\mathbb{Z}$
- $xy=(\underbrace{\alpha\gamma+\beta\delta}_{\mathbb{N}+\mathbb{N}=\mathbb{N}})-(\underbrace{\alpha\delta+\beta\gamma}_{\mathbb{N}+\mathbb{N}=\mathbb{N}})$

<u>Σημείωση</u>: Οι ακέραιοι αριθμοί είναι κλειστοί ως προς την πρόσθεση, πολλ/μο, αφαίρεση.

(β): Άμεσο

(γ) $x\in\mathbb{Z}$:

→ <u>Αν $x=0$</u>, αν $y\in\mathbb{Z}$ με $0<y<1$, τότε $y\in\mathbb{N}$ με $y<1$, άτοπο.

→ <u>Αν $x\in\mathbb{N}$</u>, τότε αν $x<y<x+1$ με $y\in\mathbb{Z}$, τότε $y>x>0$, άρα $y\in\mathbb{N}$ (Αποτέλεσμα με προηγούμενη πρόταση)

→ <u>$x=-n$</u>, $n\in\mathbb{N}$

(α) Αν $n=1$, αν $y\in\mathbb{Z}$ με $-1<y<0$, τότε $y=-\kappa$ με $\kappa\in\mathbb{N}$, τότε θα έχουμε $-1<-\kappa<0 \Rightarrow 0<\kappa<1$, άτοπο (βρήκαμε φυσικό <1)

(β) Αν $n\in\mathbb{N}$ με $n>1$, τότε $n-1\in\mathbb{N}$. Αν $y\in\mathbb{Z}$ $-n<y<-n+1<0$
$\Rightarrow 0<n-1<-y<0$

τότε $-y\in\mathbb{N}$ κ' $n-1<-y<(n-1)+1$, άτοπο

<u>Πρόταση</u>: Κάθε μη κενό κ' κφ υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $A\subseteq\mathbb{Z}$, $A\neq\emptyset$, A κφ.
Άρα $\exists\, x\in\mathbb{R}$ με $x\leq\alpha$, $\forall \alpha\in\mathbb{R}$

Από την αρχιμήδεια ιδιότητα $\exists \nu \in \mathbb{N}$ με $\nu > -x \Rightarrow -\nu < x$
Άρα $-\nu < a \quad \forall a \in A$.

Θέτουμε $B = \{\nu + a,\ a \in A\}$. Το B είναι μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$, άρα έχει ελάχιστο στοιχείο. Το ελάχιστο στοιχείο του B ($\min B$) είναι της μορφής $\nu + \gamma$ για κάποιο $\gamma \in A$.

$\nu + \gamma \le \nu + a \quad \forall a \in A$

$\Rightarrow \gamma \le a \quad \forall a \in A$

Τότε $\gamma = \min A$.

Πρόταση: Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε $\exists$ μοναδικός $k \in \mathbb{Z}$, ώστε $k \le x < k+1$.
[Το μοναδικό αυτό k ονομάζεται ΑΚΕΡΑΙΟ ΜΕΡΟΣ του x κ' συμβολίζεται με $[x]$]

Απόδειξη:

(1) ΥΠΑΡΞΗ:

Θέτουμε $A = \{y \in \mathbb{Z} : x < y\}$
Το A είναι μη κενό (αφού από την αρχιμήδεια ιδιότητα $\exists n \in \mathbb{N}$ με $x < n$, άρα $n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$) κ' κφ (από το x) υποσύνολο του $\mathbb{Z}$, άρα από την προηγούμενη πρόταση έχει ελάχιστο στοιχείο. Θέτουμε $m = \min A$, τότε $m-1 \notin A$, άρα $m-1 \le x$. Έτσι $m-1 \le x < m = (m-1)+1$, αφού $m-1 \in \mathbb{Z}$, τότε θέτοντας $k = m-1$ έχουμε $k \in \mathbb{Z}$ κ' $k \le x < k+1$

(2) ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ

Έστω $k, l \in \mathbb{Z}$ ώστε $k \le x < k+1$ κ' $l \le x < l+1$. Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} k \le x \\ \text{κ'}\ x < l+1 \end{array}\right\} \Rightarrow k < l+1$$

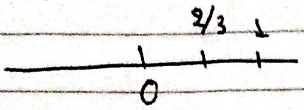
κ' επειδή $\nexists$ ακέραιος m με $l < m < l+1$, προκύπτει $\boxed{k \le l}$

$$\text{Έχουμε}\ \left.\begin{array}{l} l \le x \\ x < k+1 \end{array}\right\} l < k+1$$

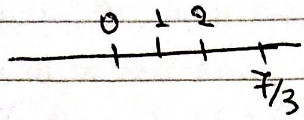
κ' επειδή $\nexists$ ακέραιος m με $k < m < k+1$, προκύπτει $\boxed{l \le k}$

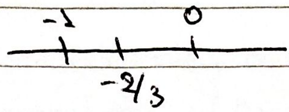
Επομένως, $l = k$.

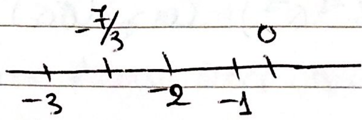
παρ.

- $\left[\frac{2}{3}\right]=0$ 

~~[illegible]~~ "ο μεγαλύτερος ακέραιος μικρότερος ή ίσος του $\frac{2}{3}$"

- $\left[\frac{7}{3}\right]=2$ 

- $\left[-\frac{2}{3}\right]=-1$ 

- $\left[-\frac{7}{3}\right]=-3$ 

Παρατήρηση:
$\forall$ πραγματικό αριθμό x
(α) $[x] \leq x < [x]+1$
(β) $x-1 < [x] \leq x$

Λήμμα: Έστω $x,y \in \mathbb{Z}$ με $y \neq 0$. Τότε $\exists q \in \mathbb{Z}$ με $x-yq>0$

Πρόταση: (ταυτότητα ευκλείδειας ~~[illegible]~~ διαίρεσης)
$\forall$ ζεύγος ακεραίων x,y με $y \neq 0$ $\exists$ μοναδικοί ακέραιοι q,r ώστε $x=qy+r$
με $0 \leq r < |y|$

Ορολογία: x: διαιρετέος
y: διαιρέτης
q: πηλίκο
r: υπόλοιπο

ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Το σύνολο $\mathbb{Q} = \{\alpha\beta^{-1}, \alpha \in \mathbb{Z}, \beta \in \mathbb{N}\} =$
$= \{\alpha\beta^{-1}, \alpha \in \mathbb{Z}, \beta \in \mathbb{Z}-\{0\}\}$

όταν έχω $\beta \in \mathbb{N}$ κ' $\beta \in \mathbb{Z}-\{0\}$ στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι το ίδιο, αφού $\alpha\beta^{-1}=(-\alpha)(-\beta$

$\alpha\beta^{-1}=\frac{\alpha}{\beta}$

· Το άθροισμα δύο ρητών είναι ρητός.
· Το γινόμενο δύο ρητών είναι ρητός.

Απόδειξη: αν $x, y \in \mathbb{Q}$.

$x = \alpha\beta^{-1}$
$y = \gamma\delta^{-1}$
, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$ με $\beta \neq 0, \delta \neq 0$.

→ $x + y = \alpha\beta^{-1} + \gamma\delta^{-1} = \alpha\delta \cdot \beta^{-1}\delta^{-1} + \beta\gamma\beta^{-1}\delta^{-1} = (\alpha\delta + \beta\gamma)(\beta^{-1}\delta^{-1}) = (\alpha\delta + \beta\gamma)(\beta\delta)^{-1}$

$\left(= \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta\delta}\right) \in \mathbb{Q}$.

→ $xy = (\alpha\beta^{-1})(\gamma\delta^{-1}) = (\alpha\gamma)(\beta^{-1}\delta^{-1}) = (\alpha\gamma)(\beta\delta)^{-1} \in \mathbb{Q}$

Παρατήρηση:

→ Το γινόμενο δύο περιττών είναι περιττός

$(2\kappa + 1)(2\mu + 1) = 4\kappa\mu + 2\kappa + 2\mu + 1 = 2(\underbrace{2\kappa\mu + \kappa + \mu}_{\text{ακέραιος}}) + 1$ περιττός

Αν κ ακέραιος η ευκλείδεια διαίρεση του κ με το 2 μας δίνει ότι $\exists\, u, r \in \mathbb{Z}$ με $\kappa = 2u + r$, $0 \leq r < 2$, άρα $r = 0$ ή $r = 1$

Αν $r = 0$ $\kappa = 2u$ ο κ θα λέγεται άρτιος

Αν $r = 1$ $\kappa = 2u + 1$ ο κ θα λέγεται άρτιος

→ Το γινόμενο ενός άρτιου με οποιονδήποτε ακέραιο είναι άρτιος

$(2\kappa)\mu = 2(\underbrace{\kappa\mu}_{\text{ακέραιος}})$ → άρτιος

Πόρισμα:

Αν α ακέραιος, τότε:

→ Αν α^2 είναι περιττός, τότε α περιττός

→ Αν α^2 είναι άρτιος, τότε α άρτιος

Θεώρημα: ∄ ρητός αριθμός q ώστε $q^2=2$

Απόδειξη:

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $\exists q\in\mathbb{Q}$ με $q^2=2$.
Έστω $q=\frac{m}{n}$ με $m,n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$. Απλοποιώντας το κλάσμα μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι m,n δεν είναι κ' οι δύο άρτιοι.

$$q^2=2 \Rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^2=2 \Rightarrow m^2=2n^2 \quad (1)$$

Άρα ο m^2 είναι άρτιος, συνεπώς ο m είναι άρτιος, άρα $m=2k$ για κάποιο $k\in\mathbb{Z}$. Έτσι από (1) προκύπτει: $(2k)^2=2n^2 \Rightarrow 4k^2=2n^2$
$\Rightarrow n^2=2k^2 \Rightarrow n^2$ άρτιος,
άρα ο n είναι άρτιος. Άτοπο, διότι υποθέσαμε ότι οι m,n δεν είναι κ' οι δύο άρτιοι.

Λήμμα:

(α) $\forall \varepsilon$ με $0<\varepsilon<1$ κ' $\forall n\in\mathbb{N}$ ισχύει $(1+\varepsilon)^n<1+3^n\varepsilon$

(β) $\forall \theta>1$ κ' κάθε $n\in\mathbb{N}$ $\exists \varepsilon>0$ με $(1+\varepsilon)^n<\theta$.

Απόδειξη:

(α) 1ο επαγωγικό βήμα: (Για $n=1$)
Η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται $1+\varepsilon<1+3\varepsilon$ που ισχύει (διότι $\varepsilon>0$)
Γενικό επαγωγικό βήμα.
Υποθέτουμε ότι ισχύει για το n, δηλαδή $(1+\varepsilon)^n<1+3^n\varepsilon$, τότε

$$(1+\varepsilon)^{n+1}<(1+\varepsilon)(1+3^n\varepsilon)$$
$$\Rightarrow (1+\varepsilon)^{n+1}<1+\varepsilon+3^n\varepsilon+3^n\varepsilon^2=1+\varepsilon\underbrace{(1+3^n+3^n\varepsilon)}\leq 1+\underbrace{(3^n+3^n+3^n)}\varepsilon$$
$$=1+3\cdot 3^n\cdot\varepsilon=1+3^{n+1}\cdot\varepsilon$$

διότι κάθε όρος του 1ου αθροίσματος είναι $<3^n$

(β) Έστω $\theta>1$
Αν βρούμε $0<\varepsilon<1$ ώστε $1+3^n\varepsilon<\theta$, τότε λόγω του α) θα ισχύει $(1+\varepsilon)^n<\theta$
Όμως: $1+3^n\varepsilon<\theta \Leftrightarrow \varepsilon<\frac{\theta-1}{3^n}$

Έτσι, επιλέγοντας ε με $0<\varepsilon<\min\left\{1,\frac{\theta-1}{3^n}\right\}$, τότε $0<\varepsilon<1$ κ' $1+3^n\varepsilon<\theta$, άρα
$(1+\varepsilon)^n<\theta$

Θεώρημα:
$\forall a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ κ' για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει (1) μοναδικός (2) $x \geq 0$ ώστε $x^n = a$

Απόδειξη:
(2) Μοναδικότητα:
Αν $0 \leq x < y$, τότε $x^n < y^n$ κ' άρα δεν μπορεί να ισχύουν ταυτόχρονα $x^n = a$ κ' $y^n = a$.

(1) Ύπαρξη:
• Αν $n=1$ θέτουμε $x=a$. Υποθέτουμε $n \geq 2$.
Αν $a=0$, θέτουμε $x=0$
Αν $a=1$, θέτουμε $x=1$
Άρα ισχύει να εξετάσουμε τις περιπτώσεις $a>1$ κ' $0<a<1$
1η περίπτωση: $a>1$
Θέτουμε $A = \{t \in \mathbb{R} : t>0, \text{ ώστε } t^n < a\}$
- $A \neq \emptyset$, διότι $1 \in A$ (γιατί $1^n = 1 < a$)
- A είναι άνω φραγμένο.
Αν $t>a$, τότε $t^n > a^n > a$, άρα $t \notin A$. Άρα το a είναι άνω φράγμα του A. Από το αξίωμα της πληρότητας το A έχει supremum.
Θέτουμε $x = \sup A$. Ισχύει ακριβώς μία από τις τρεις $x^n < a$, $x^n = a$, $x^n > a$
• Αν $x^n > a$: $\Rightarrow \frac{x^n}{a} > 1$, από το προηγούμενο λήμμα $\exists \varepsilon > 0$, ώστε

$$(1+\varepsilon)^n < \frac{x^n}{a} \Longrightarrow a < \left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^n$$ Επίσης $\frac{x}{1+\varepsilon} < x = \sup A$ (γιατί $1+\varepsilon > 1$)

θα $\exists t \in A$ με $t > \frac{x}{1+\varepsilon}$, τότε $t^n > \left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^n$, αφού $t, \frac{x}{1+\varepsilon} > 0$.

Έτσι, $a < \left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^n < t^n < a \Rightarrow a < a$, άτοπο.

διότι $t \in A$

Αν $x^n < a$: τότε $\frac{x^n}{a} < 1 \Leftrightarrow \frac{a}{x^n} > 1$, άρα από το προηγούμενο λήμμα $\exists \varepsilon > 0$
τω $(1+\varepsilon)^n < \frac{a}{x^n} \Rightarrow x^n(1+\varepsilon)^n < a \Rightarrow (x(1+\varepsilon))^n < a$

Άρα $x(1+\varepsilon) \in A$, όμως $x(1+\varepsilon) = x + \varepsilon x > \underset{\sup A}{\underset{\parallel}{x}}$ (γιατί $\varepsilon > 0$)

άτοπο.

Επομένως $x^n = a$

2η περίπτωση: $0<a<1$

Τότε $\frac{1}{a}>1$. Άρα από την 1η περίπτωση $\exists y\geq 0$, ώστε $y^n=\frac{1}{a}$

Για $x=\frac{1}{y}$, έχουμε $x^n=\frac{1}{y^n}=a$.

Συμβολισμός: Για $a\geq 0$, $n\in\mathbb{N}$ ο μοναδικός $x\in\mathbb{R}$ $x\geq 0$ για τον οποίο $x^n=a$ λέγεται n-οστή ρίζα του a κ' συμβολίζεται με $\sqrt[n]{a}$.

Άσκηση: Αν $a\geq 0, b\geq 0$, τότε $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

Απόδειξη: Επειδή $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\geq 0$ κ' $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab$

Άρα ο μοναδικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $x^n=ab$ είναι ο αριθμός $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$. Συνεπώς, $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

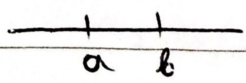
Πόρισμα: $\mathbb{R}\neq\mathbb{Q}$ Επειδή $(\sqrt{2})^2=2$ κ' $\nexists$ ρητός αριθμός q ώστε $q^2=2$

Αν $a\geq 0, n\in\mathbb{N}$ $\exists$ μοναδικό $x\geq 0$, ώστε $x^n=a$

Ορισμός: Ένας $x\in\mathbb{R}$ για τον οποίο $x\notin\mathbb{Q}$ λέγεται άρρητος.

Θεώρημα: (Πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς)
$\forall a,b\in\mathbb{R}$ με $a<b$ $\exists q\in\mathbb{Q}$ $a<q<b$

Απόδειξη: $a<b \Rightarrow b-a>0 \Rightarrow \frac{1}{b-a}>0$ Από την αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών $\exists n\in\mathbb{N}$ με $n>\frac{1}{b-a}$


$\Rightarrow n(b-a)>1 \Rightarrow nb-na>1 \Rightarrow na+1<nb$

Έχουμε $na<[na]+1\leq na+1<nb \Rightarrow a<\frac{[na]+1}{n}<b$.

Θέτοντας $q = \frac{[na]+1}{n}$ έχουμε $q \in \mathbb{Q}$ κ' $a<q<b$

Θεώρημα: (Πυκνότητα των άρρητων στους πραγματικούς)
$\forall a,b \in \mathbb{R}$ με $a<b$ $\exists$ άρρητος με $a<r<b$.

Απόδειξη: $a<b \Rightarrow a+\sqrt{2} < b+\sqrt{2}$
Από την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς $\exists q \in \mathbb{Q}$ με $a+\sqrt{2}<q<b+\sqrt{2}$
$\Rightarrow a<q-\sqrt{2}<b$

Ο αριθμός $r=q-\sqrt{2}$ είναι άρρητος (αν ήταν ρητός, τότε επειδή $\sqrt{2}=q-r$ ο $\sqrt{2}$ θα ήταν ρητός, άτοπο)

Θεώρημα: Αν ο αριθμός ρ είναι ρητός κ' ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Όπου $a_n \neq 0$ κ' $a_0, a_1, \dots, a_n$ ακέραιοι, τότε $\rho = \frac{k}{\lambda}$ με $k | a_0$, $\lambda | a_n$

Ειδική περίπτωση:
Αν $a_n = 1$, τότε κάθε ρίζα της εξίσωσης είναι είτε ακέραιος είτε άρρητος

Απόδειξη: $\rho = \frac{k}{\lambda}$, $k,\lambda \in \mathbb{Z}$ $\lambda \neq 0$ ΜΚΔ$(k,\lambda)=1$

$$a_n \left(\frac{k}{\lambda}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{k}{\lambda}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \frac{k}{\lambda} + a_0 = 0$$
$$\Rightarrow a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1}\lambda + \dots + a_1 k \lambda^{n-1} + a_0 \lambda^n = 0 \quad (1)$$

(1) $\Rightarrow a_0\lambda^n = k(-a_n k^{n-1} - a_{n-1}k^{n-2}\lambda - \dots - a_1 \lambda^{n-1})$, άρα $k | a_0 \lambda^n$
κ' επειδή ΜΚΔ$(k,\lambda)=1$ προκύπτει $k | a_0$

(1) $\Rightarrow a_n k^n = \lambda(-a_0\lambda^{n-1} - a_1\lambda^{n-2} - \dots - a_{n-1}k^{n-1})$, άρα $\lambda | a_n k^n$
κ' επειδή ΜΚΔ$(k,\lambda)=1$, προκύπτει $\lambda | a_n$